

Коллективные решения, ансамбли

Лектор – *Сенько Олег Валентинович*

Курс «Математические методы обучения»

1 Ошибки выпуклых комбинации

Задачи прогнозирования некоторой величины Y с помощью предикторов $Z_1, \dots, Z_M$. Под предикторами понимаются некоторые алгоритмы, прогнозирующие Y . Наборы алгоритмов, над которыми строятся коллективные решения в литературе по машинному обучению принято называть ансамблями. Пусть

$$Z_{\text{ссп}} = \sum_{i=1}^L c_i Z_i,$$

где

$$\sum_{i=1}^L c_i = 1,$$

$$c_i \geq 0, i = 1, \dots, L$$

Введём обозначение:

$\delta_i = \mathbb{E}(Y - Z_i)^2$ — ошибка предиктора Z_i .

$$\sum_{i=1}^L \delta_i =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^L c_i (Y - Z_{ccp} + Z_{ccp} - Z_i)^2\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{(Y - Z_{ccp})^2 + \sum_{i=1}^L c_i (Z_{ccp} - Z_i)^2 + 2(Y - Z_{ccp}) \sum_{i=1}^L (Z_i - Z_{ccp})\right\}$$

Однако

$$\sum_{i=1}^L (Z_i - Z_{ccp}) = 0$$

по определению Z_{ccp}

Следовательно

$$\delta Z_{ccp} = \mathbb{E}(Y - Z_{ccp})^2 = \sum_{i=1}^L \delta_i -$$

$$-\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^L c_i (Z_{ccp} - Z_i)^2\right]$$

Рассмотрим слагаемое

$$-\sum_{i=1}^L c_i (Z_{ccp} - Z_i)^2$$

Нетрудно показать, что оно может быть представлено в виде

$$Z_{ccp}^2 - \sum_{i=1}^L c_i Z_i^2 = \sum_{i'=1}^L \sum_{i''=1}^L c_{i'} c_{i''} Z_{i'} Z_{i''} - \sum_{i=1}^L c_i Z_i^2$$

Воспользуемся равенством

$$Z_{i'} Z_{i''} = -\frac{1}{2} \{ (Z_{i'} - Z_{i''})^2 - \\ - Z_{i'}^2 - Z_{i''}^2 \} =$$

Откуда следует

$$\sum_{i'=1}^L \sum_{i''=1}^L c_{i'} c_{i''} Z_{i'} Z_{i''} - \sum_{i=1}^L c_i Z_i^2 = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{i'=1}^L \sum_{i''=1}^L c_{i'} c_{i''} (Z_{i'} - Z_{i''})^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i'=1}^L c_{i'} Z_{i'}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i''=1}^L c_{i''} Z_{i''}^2 - \sum_{i=1}^L c_i Z_i^2$$

Откуда следует

$$-\sum_{i=1}^L c_i (Z_{csp} - Z_i)^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i'=1}^L \sum_{i''=1}^L c_{i'} c_{i''} (Z_{i'} - Z_{i''})^2$$

Введём обозначение

$$\rho_{i'i''} = \mathbb{E}(Z_{i'} - Z_{i''})^2$$

$$\delta Z_{csp} = \sum_{i=1}^L \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{i'=1}^L \sum_{i''=1}^L c_{i'} c_{i''} \rho_{i' i''}$$